



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRŮHYBOVÉ
ČÁRY PRO VELKÉ DEFORMACE**

SOLUTION OF THE EXACT DIFFERENTIAL EQUATION OF DEFLECTION CURVE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

František Šikl

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jiří Vaverka

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **František Šikl**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Jiří Vaverka**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Řešení diferenciální rovnice průhybové čáry pro velké deformace

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Deformovaný tvar nosníku namáhaného na ohyb je za předpokladu lineárně elastického materiálu popsán tzv. diferenciální rovnicí průhybové čáry. V obecném tvaru se jedná o složitou, nelineární diferenciální rovnici 2. řádu, jejíž řešení nelze vyjádřit v uzavřeném tvaru. Zavedením určitých matematických aproximací je možné rovnici převést do zjednodušené lineární formy, která je snadno řešitelná, avšak použitelná jen pro případy s malými úhly natočení střednice. Jsou-li deformace velké, je nutné použít přesnou (nezjednodušenou) rovnici průhybové čáry. K jejímu řešení je možné v literatuře najít více přístupů od analyticko-numerických využívajících eliptické integrály po čistě numerické. Jednotlivé přístupy se liší zejména matematickou náročností a rozsahem použitelnosti.

Cíle bakalářské práce:

1. Vysvětlit, na základě jakých předpokladů byla odvozena diferenciální rovnice průhybové čáry pro velké deformace a za jakých podmínek přechází do lineárního tvaru.
2. Na základě rešerše dostupné literatury uvést a popsat nejběžnější přístupy k řešení diferenciální rovnice průhybové čáry pro velké deformace.
3. Zvolit alespoň jednu z metod z rešeršní části a s využitím vhodného softwaru (např. MATLAB) provést řešení úlohy jednostranně vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou.
4. Srovnat výsledky nelineárního a lineárního řešení.

Seznam doporučené literatury:

GERE, J. M. a Barry J. GOODNO. Mechanics of materials. 7th ed. Stamford: Cengage Learning, 2009, xviii, 1002 s. ISBN 978-0-495-43807-6.

JANÍČEK, Přemysl. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-21-
-2592-X.

ČERMÁK, Libor. Numerické metody II: diferenciální rovnice. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství
CERM, 2010, 135 s. ISBN 978-80-214-4110-1.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá deformací nosníku zatíženého základním ohybem pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry. Práce je rozdělena do čtyř částí, kde v první části je odvozen obecný tvar diferenciální rovnice průhybové čáry, který vychází z jednoduché geometrie a matematických aproximací. V druhé části si popíšeme základní metody řešení diferenciální rovnice průhybové čáry pro velké deformace pro jednoduché případy, kde musíme použít nelineární tvar již zmíněné rovnice, ale zmíníme i metody, které se dají použít pro specifické případy. Ve třetí části jsou naprogramovány dvě numerické metody, které se dají použít pro řešení velkých deformací prutu. V poslední části je popsán rozdíl mezi lineární rovnicí průhybové čáry, která je zjednodušená a je běžně vyučována, a mezi nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu. Hlavním údělem práce je jakési porovnání používaných metod pro určení deformace prutu a určení míry zatížení, kdy lze použít zjednodušenou diferenciální rovnici průhybové čáry, a kdy už naopak ne. Důležité je ovšem zmínit, že numerické řešení nelze využít vždy, proto ukázka bude provedena na triviálním příkladu.

Klíčová slova

diferenciální rovnice průhybové čáry, deformace, ohyb, eliptické integrály, konzolový nosník

Abstract

This bachelor thesis deals with the deformation of a beam loaded with a basic bend using the differential equation of the deflection curve. The work is divided into four parts, where in the first part the general form of the differential equation of the deflection curve, which is based on simple geometry and mathematical approximations, is derived. In the second part, we will describe the basic methods of solving the differential equation of the deflection curve for large deformations for simple cases, where we must use the nonlinear form of the already mentioned equation. However, we will also mention methods that can be used for specific cases. In the third part, two numerical methods, which can be used to solve large deformations of beams, are being programmed. The last part describes the difference between the linear equation of the deflection curve, which is simplified and taught commonly, and the nonlinear differential equation of the second order. The fundamental task of the work is a comparison of commonly used methods to determine the deformation of the beam and to determine the degree of load, when it is possible to use a simplified differential equation of the deflection curve, and when not. However, it is important to mention that the numerical solution cannot always be used, so the example will be embedded in a simple case.

Keywords

differential equation of deflection curve, deflection, bend, elliptic integrals, cantilever beam

Bibliografická citace

ŠIKL, František. *Řešení diferenciální rovnice průhybové čáry pro velké deformace* [online]. Brno, 2020 [cit. 2020-06-23]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/125035>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Vaverka.

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Jiřímu Vaverkovi za velikou dávku vstřícnosti a trpělivosti.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že diplomovou práci jsem vypracoval samostatně, pod odborným vedením Ing. Jiřího Vaverky. Současně prohlašuji, že všechny zdroje obrazových a textových informací, ze kterých jsem čerpal, jsou řádně citovány v seznamu použitých zdrojů.

.....

Podpis autora

Obsah

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | Úvod | 13 |
| 2 | Seznámení s pojmy | 14 |
| 2.1 | Prut..... | 14 |
| 2.2 | Prutové předpoklady | 14 |
| 2.2.1 | Geometrické předpoklady | 14 |
| 2.2.2 | Vazbové a zatěžovací předpoklady | 14 |
| 2.2.3 | Deformační předpoklady..... | 15 |
| 2.2.4 | Napjatostní předpoklady | 15 |
| 2.3 | Klasifikace prutů | 15 |
| 2.3.1 | Hledisko modelovitosti | 15 |
| 2.3.2 | Hledisko geometrie prutu | 15 |
| 2.3.3 | Hledisko vazeb | 16 |
| 2.3.4 | Hledisko zatížení | 16 |
| 2.4 | Prostý ohyb | 17 |
| 3 | Odvození diferenciální rovnice průhybové čáry | 20 |
| 3.1 | Obsecný tvar rovnice | 20 |
| 3.2 | Zjednodušený tvar rovnice pro malé deformace | 23 |
| 4 | Metody řešení | 24 |
| 4.1 | Metoda eliptických integrálů | 24 |
| 4.1.1 | Eliptické integrály..... | 24 |
| 4.1.2 | Případ jednostranně vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou | 25 |
| 4.2 | Metoda podle Anga | 30 |
| 4.3 | Metoda podle Chena..... | 31 |
| 4.4 | Další metody | 32 |
| 5 | Praktická část | 34 |
| 5.1 | Řešení vetknutého nosníku zatíženého silou | 34 |
| 5.1.1 | Nelineární řešení | 34 |
| 5.1.2 | Lineární řešení..... | 35 |
| 5.1.3 | Srovnání průhybových čar | 36 |
| 5.2 | Analýza použitelnosti lineárního řešení | 37 |
| 6 | Závěr..... | 41 |
| | Seznam použitých zdrojů | 42 |

1 Úvod

Předmětem zájmu pružnosti a pevnosti je především analýza deformací a napjatostí u těles různých tvarů. Bohužel případů z praxe, které se dají jednoduše spočítat na papíře je málo, a jsme nuceni často používat numerické metody, protože jak víme, tak náš svět a většina věcí okolo nás je nelineární a jednoduché aproximace leckdy nestačí. Se stejným problémem se setkáváme i u řešení velkých deformací prutů. Tento problém je svázán s numerickým řešením diferenciální rovnice průhybové čáry (dále jen DRPČ) pro velké deformace, neboť pro výpočet menších deformací, kdy často pouhým okem ani nepoznáme vzniklou deformaci střednice prutu, stačí zjednodušená DRPČ.

Podstatou zjednodušení je zanedbání určitého členu v rovnici, který si následně popíšeme v jedné z kapitol. Přesnou (nezjednodušenou) DRPČ lze řešit několika přístupy, kde mezi nejjednodušší a nejpoužívanější se řadí řešení pomocí eliptických integrálů

Velké deformace prutů se v praxi vyskytují u málo tuhých prutů v ohybu a závisejí především na působící síle, případně momentu. Pokud bychom takového prutu řešili zjednodušenou DRPČ, dopouštíme se obrovských chyb, které jsou dále názorně ukázány v grafech. Tyto grafy jsou vytvořeny pro 2 základní metody v programu Matlab pro porovnání používaných metod.

Motivaci k řešení této problematiky můžeme najít například v uvědomění si, jak se dané metody mohou lišit, jaké se dopouští chyby při aproximaci rovnice a případně zjištěním, kdy je nutné použít zjednodušenou rovnici či rovnici v neupraveném tvaru.

Hlavním výsledkem práce by měl být přehled metod, které se dají použít na určité příklady, takže si čtenář přečte možné řešení dané problematiky a jednoduše si vybere metodu pro svůj konkrétní případ.

2 Seznámení s pojmy

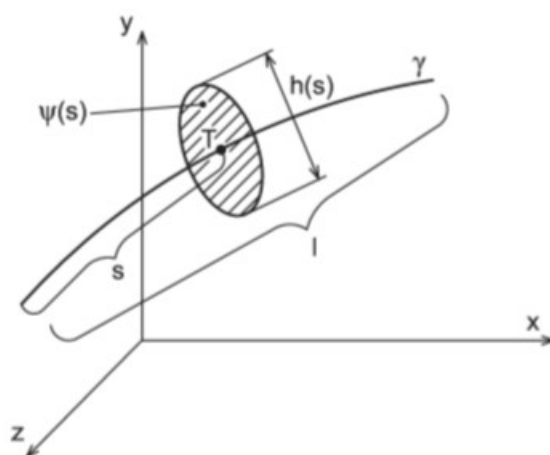
2.1 Prut

Prut v pružnosti a pevnosti je považován za nejjednodušší typ modelu, který svojí charakteristikou napjatosti a deformace nahrazuje reálné těleso [1]. Aby takto uvažovaný model byl platný, musí splňovat jisté prutové předpoklady, kde ty nejdůležitější jsou definovány v následující podkapitole 2.2. V podkapitole 2.3 je poté představeno základní členění prutů podle nejběžnějších hledisek. Uvedená klasifikace prutů je podle Janíčka a kol. [1]

2.2 Prutové předpoklady

2.2.1 Geometrické předpoklady

1. Prut je určen křivkou, tzv. střednicí γ (viz obr. 1), a příčným průřezem ψ v každém bodě střednice, který obsahuje všechny body tělesa ležící v normálové rovině. Průsečík γ a ψ je geometrickým těžištěm T průřezu ψ .



Obr. 1 Střednice a příčný průřez: základní prvky geometrie prutu [2].

2. Střednice γ je hladká a spojitá křivka konečné délky.
3. Příčný průřez je spojitá, jedno nebo vícenásobně souvislá oblast, ohraničená obrysem a charakterizovaná charakteristikami příčného průřezu.
4. Délka střednice je řádově minimálně stejně velká jako největší rozměr příčného průřezu.

2.2.2 Vazbové a zatěžovací předpoklady

1. Vazby omezují jen posuvy a úhly natočení střednice.
2. Zatížení je soustředěno na střednici, tj silovým působením na prut jsou osamělé a liniové síly a silové dvojice s působištěm na střednici.

2.2.3 Deformační předpoklady

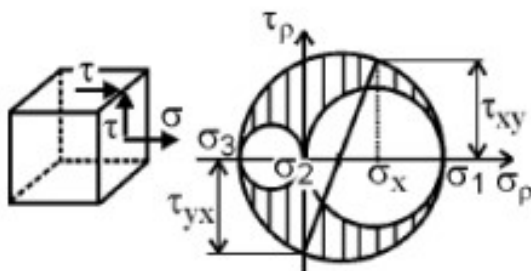
1. Střednice prutu zůstává v procesu deformace spojitá a hladká.
2. Příčné průřezy zůstávají v průběhu deformace rovinné a kolmé k deformované střednici.

Příčné průřezy se podle charakteru zatěžování:

- Vzájemně přibližují / oddalují a deformují – tah / tlak.
- Natáčí se kolem osy ležící v ψ a deformují se – ohyb.
- Natáčí se kolem osy kolmé k ψ a deformují se – krut.
- Posouvají se bez deformace – smyk.

2.2.4 Napjatostní předpoklady

1. Tzv. prutová napjatost je zvláštní typ dvojosé napjatosti, která je určena normálovým a smykovým napětím v příčném průřezu, kde všechny ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové.



Obr. 2 Prutová napjatost na elementární krychli a v Mohrově rovině [2].

2.3 Klasifikace prutů

2.3.1 Hledisko modelovitosti

1. Pruty ideální – Předpokládá se splnění všech prutových předpokladů.
2. Pruty podmíněné – Jsou formulovány podmínky použitelnosti, které vymezují, kdy lze těleso považovat za prut a kdy lze jako teorii pro řešení problémů pružnosti a pevnosti použít prostou pružnost prutů.

2.3.2 Hledisko geometrie prutu

1. Podle křivosti střednice:
 - Pruty přímé.
 - Pruty křivé rovinné.
 - Pruty křivé prostorové.

2. Podle uzavřenosti střednice:
 - Otevřené – Prut lze rozdělit na 2 prvky jedním řezem střednice.
 - Uzavřené – Prut lze rozdělit na 2 prvky dvěma řezy.
3. Podle hladkosti střednice:
 - Pruty s hladkou střednicí.
 - Pruty s konečným počtem bodů nespojitosti v hladkosti střednice.
4. Podle poměru charakteristického rozměru příčného průřezu k poloměru křivosti střednice prutu:
 - Pruty slabě zakřivené.
 - Pruty silně zakřivené.
5. Podle proměnnosti průřezu podél střednice:
 - Prizmatické – průřez je konstantní.
 - Proměnného průřezu – podél střednice se průřez spojitě mění.

2.3.3 Hledisko vazeb

1. Pruty volné.
2. Pruty vázané – staticky určitě i neurčitě uložené.

2.3.4 Hledisko zatížení

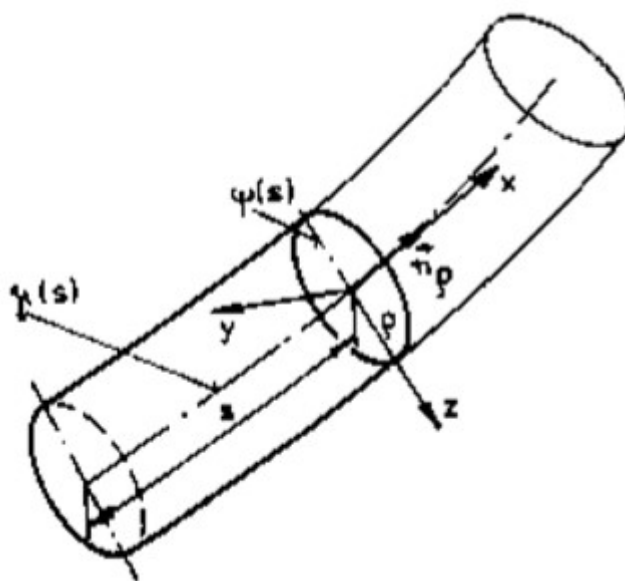
1. Pruty zatížené jednoduše.
2. Pruty zatížené kombinovaně.

2.4 Prostý ohyb

Prostým ohybem rozumíme zatěžování přímého prizmatického prutu, jestliže na dané rozlišovací úrovni platí následující podmínky [1]:

- Jsou splněny prutové předpoklady.
- Příčné průřezy se vzájemně natáčí kolem osy ležící v příčném průřezu a následně se deformují.
- Jedinou nenulovou složkou výsledných vnitřních účinků (VVÚ) je ohybový moment.
- Pro řešení statické rovnováhy se prvek uvolňuje v nedeformovaném stavu.

Uvažujme nyní obecný bod zdeformované střednice prutu namáhaného prostým ohybem. Poloha bodu je určena parametrem s vyjadřujícím délku úseku střednice od konce prutu po uvažovaný bod (viz obr. 3). Zavedme v daném bodě lokální souřadnicový systém (x, y, z) tak, že osa x je orientována ve směru vnější normály průřezu (tedy tečně ke střednici) a osy y a z jsou hlavními centrálními osami průřezu v daném bodě. V tomto lokálním souřadnicovém systému nyní popíšeme rozložení přetvoření a napětí v příčném průřezu obecného tvaru při namáhání prostým ohybem.



Obr. 3 Lokální souřadnicový systém v obecném bodě [1].

Z předpokladu o zachování rovinnosti příčného průřezu při deformaci (viz prutové předpoklady) vyplývá, že délková přetvoření ε_x ve směru osy x jsou po příčném průřezu rozložena lineárně [3]. Předpokládáme-li dále lineární závislost mezi normálovým napětím σ_x a přetvořením ε_x vyjádřenou Hookeovým zákonem

$$\sigma_x(y, z) = E\varepsilon_x(y, z), \quad (2.1)$$

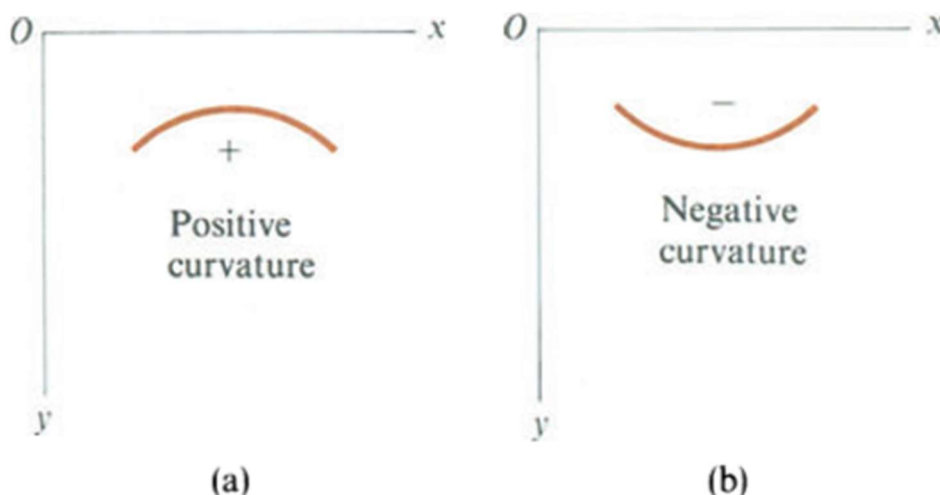
kde E je modul pružnosti materiálu, pak platí, že lineární rozložení má také napětí σ_x . Vzhledem k tomu, že silová výslednice normálových napětí (tj. normálová síla)

musí být při prostém ohybu nulová, je zřejmé, že na části příčného průřezu je napětí σ_x kladné a na jiné části záporné. Oblasti s rozdílným znaménkem jsou odděleny tzv. neutrální osou [1], v jejích bodech je přetvoření i napětí nulové. Okolo této osy se příčný průřez při ohybu natáčí. Z podmínky nulovosti normálové síly lze určit, že neutrální osa vždy prochází těžištěm průřezu [3]. Neutrální osy příčných průřezů vytvářejí tzv. neutrální rovinu, která může být buď totožná, nebo různá od roviny nositelek ohybového momentu \vec{M}_o [2].

S využitím výše uvedených poznatků lze rozložení přetvoření v příčném průřezu vyjádřit v obecném tvaru [1]:

$$\varepsilon_x(y, z) = -(\kappa_y y + \kappa_z z), \quad (2.2)$$

což je rovnice roviny procházející počátkem souřadnicového systému. Konstanty κ_y , κ_z v rov. (1.2) vyjadřují křivost průmětu střednice do roviny xy , resp. xz . Křivost je kladná, jestliže střed křivosti má kladnou souřadnici y , resp. z (viz obr. 2).



Obr. 4 Znaménková konvence pro křivost κ_y v rovině xy [3].

Dosadíme-li rov. (1.2) do rov. (1.1), dostaneme pro normálové napětí vztah

$$\sigma_x(y, z) = -E(\kappa_y y + \kappa_z z). \quad (2.3)$$

Momentovou výslednici \vec{M}_o napětí $\sigma_x(y, z)$ vyjádřeného rovnicí (1.3) lze rozložit do směru os y a z (viz obr.5) a vyjádřit pomocí složek [3]:

$$M_y = -E\kappa_z J_y, \quad (2.4)$$

případně

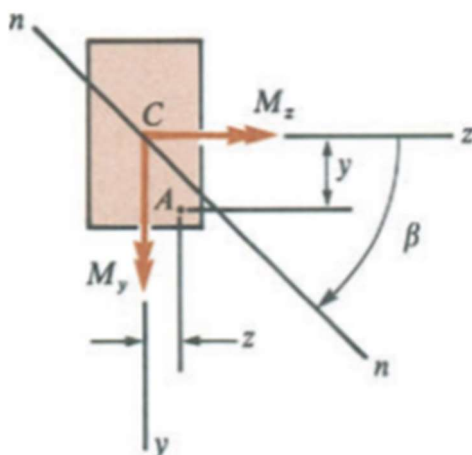
$$M_z = -E\kappa_y J_z, \quad (2.5)$$

kde J_y a J_z jsou osové kvadratické momenty k odpovídajícím osám. Vyjádříme-li z rovnic (1.4) a (1.5) křivosti κ_y , κ_z a dosadíme je do (1.2) a (1.3), dostaneme pro napětí a přetvoření výsledné vztahy

$$\varepsilon_x(y, z) = \frac{1}{E} \left(-\frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y} \right), \quad (2.6)$$

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y} \quad (2.7)$$

Poznamenejme, že rovnice (1.4) - (1.7) platí pouze v případě, že osy y a z jsou osami hlavními centrálními, tak jak je předpokládáno v úvodu této podkapitoly.



Obr. 5 Kladné směry složek ohybového momentu [3].

Je-li jedna ze složek M_y , M_z nulová, pak nositelka momentu \vec{M}_o je totožná s některou z hlavních centrálních os a lze dokázat, že v takovém případě s příslušnou hlavní centrální osou splývá také neutrální osa (všechny tři osy jsou tedy totožné). Tento případ se označuje jako základní ohyb [2]. Maximální napětí v daném příčném průřezu lze v případě základního ohybu vypočítat pomocí vztahu [1]

$$\sigma_{max} = \frac{M_o}{W_o}, \quad (2.8)$$

kde modul příčného průřezu v ohybu W_o je definován jako poměr osového kvadratického momentu J_n vypočítaného k neutrální ose a kolmé vzdálenosti h_{max} nejodlehlejšího bodu příčného průřezu od neutrální osy [1].

3 Odvození diferenciální rovnice průhybové čáry

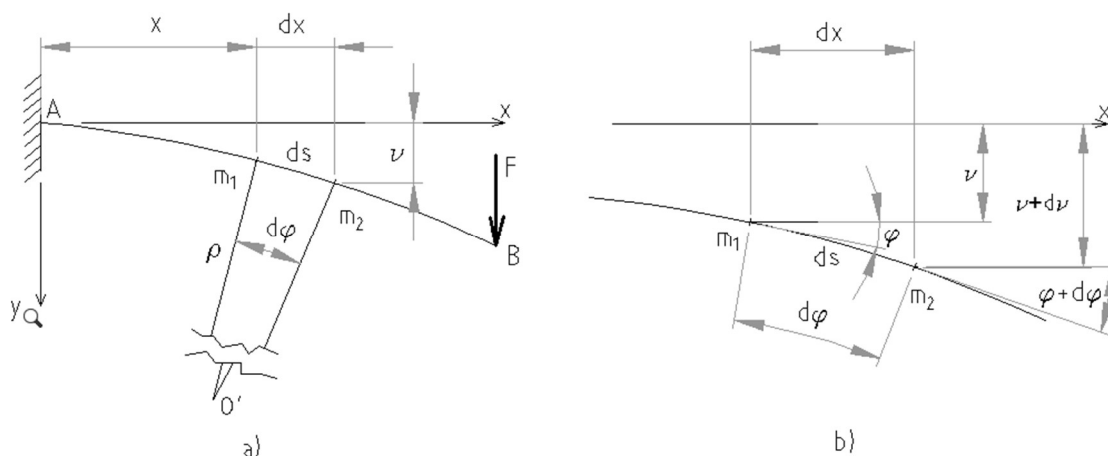
Je-li prut zatížen silami kolmými na střednici, zdeformuje se střednice do křivky zvané průhybová čára [1]. V této kapitole si matematicky popíšeme tvar průhybové čáry, což je nezbytné k výpočtu natočení, případně průhybu prutu, v kterémkoliv místě střednice.

Znalost vztahu pro výpočet průhybu po délce prutu je také nezbytná pro řešení staticky neurčitě uložených prutů nebo pro určení maximálních hodnot průhybů, zda nepřekračují dovolené hodnoty pro konkrétní případy. Znalost maximálních průhybů je důležitá nejen ve strojírenství, ale například i ve stavitelství, kde velké průhyby nepříznivě ovlivňují vzhled a celkovou stabilitu budovy [3].

3.1 Obecný tvar rovnice

Pro odvození obecného tvaru DRPČ budeme uvažovat prizmatický, konzolový (jednostranně vetknutý) nosník AB znázorněný na obr. 6.

Nejprve si definujeme globální souřadnicový systém s počátkem v bodě A, jehož osa x směřuje doprava, osa y dolů a osa z vzad (za rovinu xy). (Poznamenejme, že osy globálního a lokálního souřadnicového systému budou v textu značeny stejnými symboly, jak je zvykem i v mnoha učebních textech [3], neboť z kontextu je obvykle zřejmé, ke kterým souřadnicím je odkazováno.) Uvažujme, že rovina xy je rovinou symetrie prutu (příčný průřez je tedy symetrický) a síla P působí v této rovině. Z poznatků uvedených v podkapitole 2.4 vyplývá, že za těchto předpokladů bude neutrální osa v každém příčném průřezu kolmá na rovinu xy a střednice tedy bude i po deformaci ležet v rovině xy . Lokální souřadnicový systém pro daný bod zdeformované střednice, nechť vznikne translací globálního souřadnicového systému do tohoto bodu a jeho následným pootočením okolo posunuté osy z tak, aby osa x byla tečnou ke střednici. Je zřejmé, že za těchto podmínek platí $M_y = \kappa_z = 0$. Pro zjednodušení zápisu budou proto v dalším textu nenulové složky M_z a κ_y označovány bez indexů, tedy jako M a κ . Obdobně pro J_z použijeme jednodušší označení J , neboť J_y se nebude ve výpočtech vyskytovat.



Obr. 6 Průhybová čára [3] (upraveno).

Průhyb v nosníku v libovolném bodě m_1 , jehož poloha je určena souřadnicí x , je posuv tohoto bodu ve směru osy y . Průhyb je považován za kladný, jestliže se uskutečňuje v kladném směru osy y . Když vyjádříme průhyb v jako funkci x , dostaneme rovnici průhybové čáry [3]. Úhel natočení φ střednice v bodě m_1 je úhel mezi osou x a tečnou k průhybové čáře. Pro zvolené kladné směry os x a y bývá úhel zpravidla považován za kladný, když se zvětšuje ve směru hodinových ručiček [3].

Nyní uvažujme druhý bod m_2 situovaný v malé vzdálenosti ds od bodu m_1 měřené podél křivky zdeformované střednice (viz obr. 6a). Na ose x je poloha tohoto bodu popsána souřadnicí $x + dx$ a průhyb v tomto bodě je tedy $v + dv$, kde dv je přírůstek průhybu při přechodu z m_1 do m_2 . Obdobně úhel rotace v m_2 je $\varphi + d\varphi$, kde $d\varphi$ je přírůstek úhlu rotace.

V bodech m_1 a m_2 můžeme sestavit normály k průhybové křivce, které se protnou v bodě označovaném jako střed křivosti O' . Vzdálenost O' od křivky je poloměr křivosti ρ , který je převrácenou hodnotou křivosti κ [3].

Z obr. 6a dále plyne, že

$$\rho \cdot d\varphi = ds, \quad (3.1)$$

což nám dává vztah pro křivost

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (3.2)$$

Znaménková konvence pro zakřivení je na obr. 4. Uvědomme si, že kladné zakřivení koresponduje s kladnou hodnotou $\frac{d\varphi}{ds}$, která vyjadřuje nárůst úhlu φ při malém posuvu po střednici směrem k bodu B.

Jak lze vidět z obr. 6b, úhel natočení φ se dá určit následovně:

$$\frac{dv}{dx} = \tan\varphi \quad (3.3)$$

$$\varphi = \arctan \frac{dv}{dx} \quad (3.4)$$

Dosadíme-li (3.4) do (3.2) a použijeme-li řetězkové pravidlo pro derivování složené funkce, dostaneme

$$\kappa = \frac{d(\arctan v')}{ds} = \frac{d(\arctan v')}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{v''}{1+(v')^2} \cdot \frac{dx}{ds}. \quad (3.5)$$

Z obr. 6a je dále zřejmé, že $ds^2 = dx^2 + dv^2$. Po vydělení celé rovnice členem dx^2 a odmocnění obou stran, obdržíme

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = [1 + (v')^2]^{1/2}. \quad (3.6)$$

Substitucí (3.6) do rovnice (3.5) získáme obecný vztah pro křivost střednice v kartézských souřadnicích, který je nezávislý na typu materiálu i na velikosti deformace:

$$\kappa = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}}. \quad (3.7)$$

Dále je nutné vyjádřit křivost v závislosti na působícím ohybovém momentu. Omezíme-li se na případy s lineárně elastickým materiálem, je tato závislost popsána rov. (1.5), kterou lze nyní přepsat do tvaru

$$\kappa = \frac{M}{EJ}, \quad (3.8)$$

kde byly vynechány souřadnicové indexy veličin, tak jak bylo avizováno v úvodu této podkapitoly. Kombinací rovnic (3.7) a (3.8) získáme výsledný tvar DRPČ pro velké deformace:

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = \frac{M}{EJ}. \quad (3.9)$$

Rovnice (3.9) je vyjádřena v kartézském souřadnicovém systému a veličiny v a M jsou tedy funkcí souřadnice x . Při aplikaci DRPČ na konkrétní případy je někdy vhodnější pracovat s veličinami závislými na souřadnici s jdoucí podél střednice. Pro tyto případy můžeme kombinací rovnic (3.2) a (3.8) získat alternativní tvar DRPČ

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ}. \quad (3.10)$$

v němž jsou levá i pravá strana uvažovány závislé na souřadnici s .

3.2 Zjednodušený tvar rovnice pro malé deformace

Většina nosníků podléhá při zatížení velmi malým natočením střednice, což vede k téměř ploché průhybové křivce s velmi malým zakřivením. Pro tyto případy lze zavést určité aproximace, které výrazně zjednoduší analýzu [3]. Z obr. 6b můžeme vidět, že

$$ds = \frac{dx}{\cos\varphi} \quad (3.11)$$

Pro velmi malé úhly φ platí přibližně $\cos\varphi \approx 1$ a rovnice (3.11) přejde do tvaru

$$ds \approx dx \quad (3.12)$$

Po dosazení do rovnice (3.2) dostaneme

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad (3.13)$$

Další zjednodušení při stejné úvaze, kdy je úhel φ velmi malý, můžeme použít následovně:

$$\varphi \approx \tan\varphi = \frac{dv}{dx} \quad (3.14)$$

Poznamenejme, že úhel natočení φ je zde měřen v radiánech.

Zderivujeme-li rov. (3.14) podle x , dostaneme

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.15)$$

Kombinací této rovnice s rovnicí (3.13) získáme tvar

$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} = v'', \quad (3.16)$$

který je obdobou rovnice (3.7) platnou pro malé úhly natočení střednice [3].

Je-li materiál nosníku lineárně elastický, tedy respektuje Hookeův zákon, lze kombinací rovnic (3.16) a (3.8) získat výsledný tvar DRPČ pro malé deformace:

$$v'' = \frac{M}{EJ}. \quad (3.17)$$

Porovnáním obecné DRPČ (3.9) a její zjednodušené varianty (3.17) vidíme, že předpoklad malých deformací odpovídá zanedbání členu $(v')^2$ v rov. (3.9), čímž jmenovatel na levé straně rovnice nabyde hodnoty 1. Člen $(v')^2$ vyjadřuje míru natočení střednice (viz rov. (3.3)), jeho zanedbání je tedy přijatelné jen pro úhly φ blízké nule. Je-li úhel natočení velký, je nutné použít základní rovnici (3.9) [3]. Možnosti jejího řešení budou rozebrány v následující kapitole 4.

4 Metody řešení

Existuje mnoho metod, podle kterých lze vypočítat nebo přesněji odhadnout velké deformace prutu. Některé metody jsou ovšem složitější na výpočet a vyžadují náročnější techniku než další metody. Určité metody jsou vhodné spíše na specifické zatěžování, případně na specifickou geometrii prutu, a proto se nedá jasně určit, která metoda je nejlepší.

Je zde ale pár metod, které jsou nejvíce používané, nejsou náročné na výpočet a lze je použít pro různé typy zatížení, a tyto metody si nyní podrobněji popíšeme.

4.1 Metoda eliptických integrálů

Tato metoda je nejvíce používaná, a proto si ji popíšeme důkladněji. Řešení je pomocí eliptických integrálů a přišli s ní Bishopp a Drucker [7]. Metoda je vhodná jen pro jednoduché případy jako je jednostranně vetknutý nosník zatížený osamělou silou a pro složitější případy s komplexním zatížením, jiným uložením případně s proměnlivostí příčného průřezu je neefektivní a je proto vhodnější použít jiné metody. Metoda vyžaduje Hookeovský materiál prutu [4].

V této podkapitole bude vysvětlena aplikace metody eliptických integrálů na případ jednostranně vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou, nejprve si však definujeme eliptické integrály.

4.1.1 Eliptické integrály

Eliptické integrály jsou historicky spojeny s výpočtem obvodu elipsy. Moderní matematika definuje eliptický integrál jako funkci f , která může být vyjádřena ve tvaru [5]

$$f(x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)}) dt, \quad (4.1)$$

kde R je racionální funkce dvou argumentů, P je polynom 3. nebo 4. řádu s různými kořeny a C je konstanta.

Obecně integrály v této formě nemůžou být vyjádřeny pomocí elementárních funkcí [5], avšak vhodnými úpravami můžeme každý eliptický integrál vyjádřit v závislosti na třech základních (tzv. kanonických) formách označovaných jako neúplný integrál prvního, druhého a třetího druhu. Jejich tvar je následující [5]:

- Neúplný eliptický integrál prvního druhu

$$F(\varphi, p) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (4.2)$$

kde p je excentricita a φ je amplituda.

- Neúplný eliptický integrál druhého druhu

$$E(\varphi, p) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (4.3)$$

- Neúplný eliptický integrál třetího druhu

$$\Pi(n, \varphi, p) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (4.4)$$

kde n je charakteristické číslo, které může nabývat libovolné hodnoty nezávisle na ostatních argumentech. Integrály v rov. (4.2) - (4.4) je nutné řešit numericky (stejně jako všechny ostatní eliptické integrály), avšak vzhledem k tomu, že se jedná o standardní tvary, jsou v moderních výpočetních programech běžně zabudované příkazy pro jejich výpočet (dříve se jejich hodnoty hledaly v tabulkách).

Je-li amplituda $\varphi = \frac{\pi}{2}$, označují se eliptické integrály jako kompletní [5] a pro integrál prvního druhu se v tomto případě obvykle zavádí nové označení K . Dosazení konkrétní hodnoty amplitudy má za následek, že každý kompletní integrál obsahuje o jednu proměnnou méně než odpovídající neúplný integrál, jak ukazují následující definiční vztahy.

- Úplný eliptický integrál prvního druhu

$$K(p) = F\left(\frac{\pi}{2}, p\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.5)$$

- Úplný eliptický integrál druhého druhu

$$E(p) = E\left(\frac{\pi}{2}, p\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (4.6)$$

- Úplný eliptický integrál třetího druhu

$$\Pi(n, p) = \Pi\left(n, \frac{\pi}{2}, p\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.7)$$

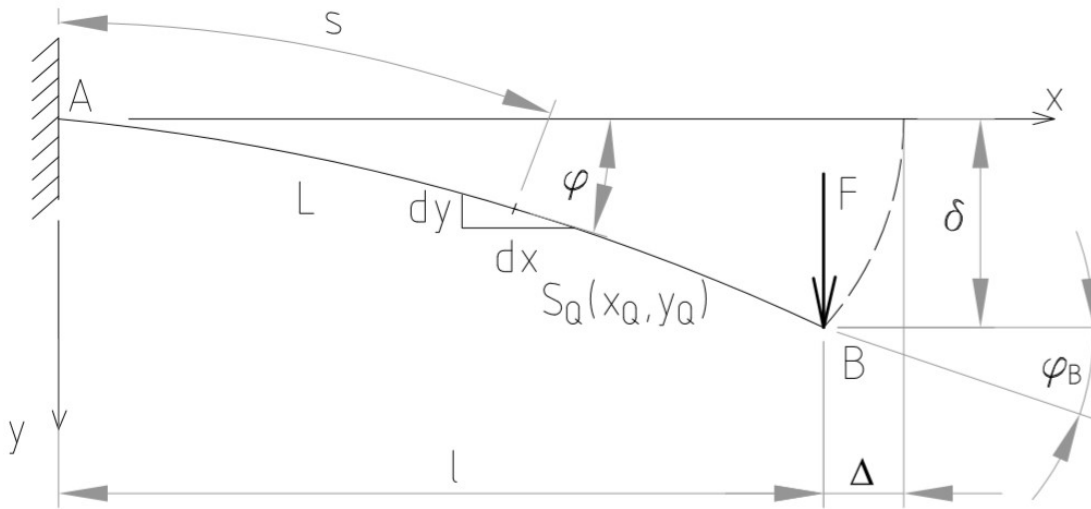
4.1.2 Příklad jednostranně vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou

Tvar DRPČ pro případ jednostranně vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou je detailně odvozen např. v [6]. Na následujících řádcích jsou nejprve uvedeny základní kroky tohoto odvození a poté je popsán postup řešení získané rovnice.

Uvažujme nosník o délce L znázorněný na obr. 7. Kladné směry os a znaménkové konvence pro potřebné veličiny uvažujeme stejně jako v kap. 3. Na základě obr. 7 můžeme průběh ohybového momentu po délce prutu vyjádřit rovnicí

$$M = F(L - x - \Delta), \quad (4.8)$$

kde význam symbolu Δ je zřejmý z obr. 7. (Zdůrazněme, že při řešení rovnováhy zde na rozdíl od teorie prosté pružnosti uvažujeme prvek tělesa uvolněný v deformovaném stavu.)



Obr. 7 Deformovaná střednice prutu [6] (upraveno).

Při formulaci DRPČ pro nosník na obr. 7 je vhodnější používat veličiny závislé na souřadnici s [6]. Naším výchozím bodem proto bude rov. (3.10). Dosadíme-li do ní vztah (4.8), získáme rovnici

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{F}{EJ} (L - x - \Delta), \quad (4.9)$$

jejíž levá strana předpokládá závislost na s , ale pravá strana je funkcí x . Je proto třeba zbavit se závislosti na x . Rovnici nejprve zderivujeme s použitím řetízkového pravidla

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{F}{EJ} (L - x - \Delta) \right) = -\frac{F}{EJ} \frac{dx}{ds} = -\frac{F}{EJ} \cos\varphi \quad (4.10)$$

Integrací obou stran rovnice (4.10) lze postupnými úpravami dospět k diferenciální rovnici závislé pouze na s [6]:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -\frac{F}{EJ} \sin\varphi + C \quad (4.11)$$

Tato rovnice je nelineární diferenciální rovnice prvního řádu s neznámou konstantou C , kterou můžeme určit z okrajové podmínky pro volný konec prutu (bod B se souř. $s = L$), kde platí, že ohybový moment $M = 0$. Dosazením do rovnice (3.10) získáme okrajovou podmínku pro volný konec prutu $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ a z rovnice (4.11) pak pro konstantu C plyne:

$$C = \frac{F}{EJ} \sin \varphi_B, \quad (4.12)$$

kde φ_B je úhel natočení v bodě B. Dosazením konstanty C do rovnice (4.11) získáme upravený tvar DRPČ pro jednostranně vetknutý prut zatížený osamělou silou

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\frac{2F}{EJ} (\sin \varphi_B - \sin \varphi)} \quad (4.13)$$

Nyní můžeme přistoupit k řešení deformovaného tvaru střednice. Z rov. (4.13) nejprve vyjádříme délkový element ds střednice ve tvaru

$$ds = \frac{1}{\sqrt{\frac{2F}{EJ} (\sin \varphi_B - \sin \varphi)}} d\varphi. \quad (4.14)$$

S využitím rovnice (3.11) můžeme vyjádřit také dx :

$$dx = \cos \varphi ds = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\frac{2F}{EJ} (\sin \varphi_B - \sin \varphi)}} d\varphi \quad (4.15)$$

a analogicky i dy :

$$dy = \sin \varphi ds = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\frac{2F}{EJ} (\sin \varphi_B - \sin \varphi)}} d\varphi. \quad (4.16)$$

Integrací rovnic (4.14)–(4.16) vyjádříme souřadnice s_Q , x_Q a y_Q libovolného bodu Q ležícího na zdeformované střednici:

$$s_Q = \int_0^{\varphi_Q} ds = \int_0^{\varphi_Q} \frac{1}{\sqrt{\frac{2F}{EJ} (\sin \varphi_B - \sin \varphi)}} d\varphi, \quad (4.17)$$

$$x_Q = \int_0^{\varphi_Q} dx = \int_0^{\varphi_Q} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\frac{2F}{EJ} (\sin \varphi_B - \sin \varphi)}} d\varphi, \quad (4.18)$$

$$y_Q = \int_0^{\varphi_Q} dy = \int_0^{\varphi_Q} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\frac{2F}{EJ} (\sin \varphi_B - \sin \varphi)}} d\varphi. \quad (4.19)$$

Úhel φ_Q v rovnicích (4.17)–(4.19) je úhel natočení střednice v bodě Q a nulová dolní mez integrálů vyjadřuje nulový úhel natočení v místě vetknutí.

Pro integrál v rovnici (4.18) lze nalézt řešení v uzavřeném tvaru (viz dále), pro zbývající integrály v rov. (4.17) a (4.19) to však možné není [6], a je tedy nutné použít numerickou integraci (např. obdélníkovou nebo lichoběžníkovou metodu). Řešení je však možné zjednodušit vyjádřením integrálů pomocí eliptických integrálů prvního a druhého druhu (viz podkapitola 4.1.1), pro jejichž numerický výpočet jsou ve výpočetních programech běžně dostupné zabudované příkazy.

Převedení se provádí substitucí proměnné φ novou proměnnou ϕ podle rovnice [6]

$$\sin \varphi = 2p^2 \sin^2 \phi - 1, \quad (4.20)$$

kde

$$p = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi_B}{2}} \quad (4.21)$$

Použijeme-li tuto substituci v integrálech v rov. (4.17)–(4.19), dostaneme po mnoha úpravách transformované vztahy [6]

$$s_Q = \sqrt{\frac{EJ}{F}} \int_{\phi_A}^{\phi_Q} \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi}} d\phi, \quad (4.22)$$

$$x_Q = 2p \sqrt{\frac{EJ}{F}} \int_{\phi_A}^{\phi_Q} \sin \phi d\phi, \quad (4.23)$$

$$y_Q = \sqrt{\frac{EJ}{F}} \left(\int_{\phi_A}^{\phi_Q} \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi}} d\phi - 2 \int_{\phi_A}^{\phi_Q} \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \phi} d\phi \right). \quad (4.24)$$

Meze integrálů v rov. (4.22)–(4.24) se vztahují k bodům A a Q nosníku na obr. 7 a jsou dány vztahy

$$\phi_A = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}p}, \quad (4.25)$$

$$\phi_Q = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi_Q}{2p^2}}, \quad (4.26)$$

kteře vyplývají z rov. (4.20). V rovnicích (4.22) a (4.24) poznáváme základní tvary eliptických integrálů, které byly představeny v podkapitole 4.1.1, konkrétně se jedná o neurčité eliptické integrály prvního a druhého druhu. Integrál v rov. (4.23) lze řešit běžným postupem. S použitím standardizovaného označení eliptických integrálů dle rovnic (4.2) a (4.3) můžeme souřadnice s_Q , x_Q a y_Q vyjádřit v konečném tvaru

$$s_Q = \sqrt{\frac{EJ}{F}} \left(F(\phi_Q, p) - F(\phi_A, p) \right), \quad (4.27)$$

$$x_Q = 2p \sqrt{\frac{EJ}{F}} (\cos \phi_A - \cos \phi_Q), \quad (4.28)$$

$$y_Q = \sqrt{\frac{EJ}{F}} \left(F(\phi_Q, p) - F(\phi_A, p) - 2E(\phi_Q, p) + 2E(\phi_A, p) \right). \quad (4.29)$$

Pro výpočet eliptických integrálů (respektive parametrů p , ϕ_A , ϕ_Q , které se v nich vyskytují) potřebujeme znát úhel natočení na volném konci prutu ϕ_B . Ten můžeme určit využitím okrajové podmínky

$$s_B = L, \quad (4.30)$$

která říká, že souřadnice s bodu B je rovna délce prutu, tedy že délka prutu se při deformaci nemění, a tedy zanedbáváme vliv normálové síly. Tuto podmínku je možné vyjádřit pomocí rovnice (4.27), do níž místo ϕ_Q dosadíme ϕ_B , pro které z rov. (4.20) a (4.21) platí

$$\phi_B = \frac{\pi}{2} \quad (4.31)$$

Dostáváme tedy podmínku

$$s_B = \sqrt{\frac{EJ}{F}} \left(F(\phi_B, p) - F(\phi_A, p) \right) = \sqrt{\frac{EJ}{F}} \left(K(p) - F(\phi_A, p) \right) = L, \quad (4.32)$$

z níž vyjádříme

$$F = \frac{EJ}{L^2} \left(K(p) - F(\phi_A, p) \right)^2 \quad (4.33)$$

Úhel ϕ_B nyní určíme iteračně [6]. Jeho hodnotu si nejprve libovolně zvolíme z intervalu $< 0; \pi/2$) a dopočítáme hodnoty p a ϕ_A . Ty pak dosadíme do (4.33) a vypočítáme velikost síly F odpovídající námi zvolenému úhlu ϕ_B . Celý postup

opakuje, dokud nenajdeme takovou hodnotu φ_B , pro kterou bude síla F s dostatečnou přesností rovna zadané hodnotě.

Známe-li úhel φ_B odpovídající zadaným hodnotám F , L , E , J , tak můžeme vypočítat souřadnice libovolného bodu Q střednice. Tvar celé střednice pak určíme tak, že vypočítáme souřadnice velkého počtu bodů (obecně n) a tyto body vyneseme do grafu. Postupujeme tak, že zvolíme n úhlů φ_Q z intervalu $\langle 0; \varphi_B \rangle$ a pro každý z nich pomocí rov. (4.26) dopočítáme ϕ_Q . Tyto hodnoty poté využijeme pro výpočet n souřadnic x_Q a n souřadnic y_Q podle odvozených vztahů (4.28) a (4.29). Získaných n bodů $[x_Q, y_Q]$ poté vyneseme do grafu.

4.2 Metoda podle Anga

Kromě řešení pomocí eliptických integrálů lze použít například metodu podle Anga [8]. Na rozdíl od metody eliptických integrálů, která je analyticko-numerická (vyčíslení eliptických integrálů vyžaduje numerickou integraci), se jedná o metodu čistě numerickou. Metoda je iterační a nevyžaduje složité výpočty. Její přesnost je prakticky shodná s řešením pomocí eliptických integrálů [8].

Definujme si opět problém v kartézském souřadnicovém systému. Mějme konzolový prizmatický prut z obr. 7 a známe veličiny F , E a J . Výchozím bodem je tentokrát DRPČ vyjádřená v kartézských souřadnicích (rov. (3.9)). Dosadíme-li do ní vztah pro ohybový moment, dostaneme

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{F(l-x)}{EJ}, \quad (4.34)$$

kde zavádíme veličinu l , která vyjadřuje promítnutou délku zdeformovaného prutu do vodorovné osy x . Platí, že $l = L - \Delta$. Pomocí substituce

$$\frac{dy}{dx} = z \quad (4.35)$$

lze rov. (4.34) upravit do tvaru

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(l-x)}{EJ} (1 + z^2)^{3/2}. \quad (4.36)$$

Stejnou substituci můžeme použít také v rov. (3.6), čímž dostáváme

$$\frac{ds}{dx} = (1 + z^2)^{1/2}. \quad (4.37)$$

Rovnice (4.35)–(4.37) tvoří nelineární soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, která je řešitelná běžnými numerickými metodami (např. Eulerovou metodou, nebo Runge–Kuttovou metodou, kterou použili Ang a spol[8]). Postup řešení je takový, že nejprve zvolíme libovolně hodnotu l a následně rozdělíme interval $\langle 0, l \rangle$ na n stejně dlouhých dílčích intervalů délky h .

Tím obdržíme $(n + 1)$ hodnot souřadnice x pokrývajících interval $\langle 0, l \rangle$. S využitím počátečních podmínek $z(0) = y(0) = s(0) = 0$ poté můžeme danou soustavu pomocí příslušné numerické metody v n krocích vyřešit. Celé řešení opakujeme, dokud nenajdeme takovou hodnotu l , pro kterou bude poslední vypočtená hodnota souřadnice s přibližně rovna délce prutu, tedy:

$$s_{(n+1)} \approx s(l) = L. \quad (4.38)$$

Zde je opět předpokládáno, že délka prutu L se při deformaci nemění. Po nalezení odpovídající hodnoty l můžeme vynést do grafu $(n + 1)$ bodů o souřadnicích $[x_i, y_i]$, čímž obdržíme průhybovou čáru prutu.

4.3 Metoda podle Chena

Další metoda je modifikací předešlé metody popsané v podkapitole 4.2. Přišel s ní Li Chen [4] a rozdíl spočívá v integrování momentu. Tato metoda je univerzální a lze tedy uvažovat různá zatížení, proměnné vlastnosti nosníku (změna průřezu po délce) a vyžaduje pouze jednoduchý numerický výpočet [4].

Základem je opět soustava rovnic (4.35)–(4.37). Rovnici (4.36) přepíšeme do tvaru

$$\frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ} dx, \quad (4.39)$$

v němž zatím není dosazeno za moment $M(x)$ (uvažujeme tedy obecné zatížení). V rov. (4.39) lze integrovat levou stranu podle z a pravou stranu podle x , dostáváme tak vztah [4]

$$\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = \int_0^x \frac{M(x)}{EJ} dx, \quad (4.40)$$

kde jsme použili počáteční podmínku $z(0) = 0$. Pro lepší přehlednost dále zavedeme pro integrál na pravé straně rovnice (4.40) nové označení

$$G(x) = \int_0^x \frac{M(x)}{EJ} dx. \quad (4.41)$$

S touto substitucí přechází rov. (4.40) do tvaru

$$\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = G(x). \quad (4.42)$$

Kombinací rovnic (4.37) a (4.42) získáme tvar

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - G^2(x)}} \quad (4.43)$$

a obdobně z rovnic (4.35) a (4.42) dostaneme následující vztah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x)}{\sqrt{1 - G^2(x)}}. \quad (4.44)$$

Rovnice (4.43) a (4.44) se teď stávají hlavními rovnicemi k řešení průhybu konzolového nosníku. Pro jednoduchá zatížení a neměnné charakteristické vlastnosti nosníku (konstantní příčný průřez i modul pružnosti) jsou tyto rovnice obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu, kde se na pravé straně neobjevují závislé proměnné, a proto mohou být přímo integrovány [4].

Pokud budeme uvažovat koncentrované zatížení, jako na obr. 7, prizmatický, konzolový prut, je ohybový moment popsán opět rovnicí

$$M(x) = F(l - x) \quad (4.45)$$

Proto se funkce $G(x)$ po zintegrování rovnice (4.41) rovná

$$G(x) = \frac{F}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (4.46)$$

Po dosazení do rovnic (4.43) a (4.44) dostáváme

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{F^2}{E^2 J^2} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)^2}} \quad (4.47)$$

a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{F}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{F^2}{E^2 J^2} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)^2}}. \quad (4.48)$$

Postup řešení je nyní obdobný jako v případě Angovy metody. Nejprve je nutné s využitím rovnice (4.47) iteračně určit hodnotu l , tak aby platilo $s(l) = L$. To lze provést opět např. pomocí explicitní Eulerovy metody, ale také např. numerickou integrací lichoběžníkovou metodou. Jakmile je hodnota l nalezena, lze s využitím rov. (4.48) nalézt libovolný počet bodů zdeformované střednice a graficky znázornit průhybovou čáru.

4.4 Další metody

Kromě již zmíněných metod existují samozřejmě mnohé jiné metody, které jsme tu podrobněji neuvedli z důvodu matematické složitosti, která převyšuje náročnost bakalářského studia. Mezi tyto metody patří například nelineární metoda střelby (non-linear shooting method) [9, 10], která převádí případ s dvěma okrajovými body na iterační metodu pro řešení problému s počátečními podmínkami a lze v ní zohlednit jakýkoliv typ zatížení.

Další s použitelných metod si uvedeme metodu rozkladu podle Adomiana (Adomian decomposition method) [11,]. Narozdíl od předešlé nelineární metody střelby, kde je výsledkem řešení ve formě jednotlivých bodů střednice, v této metodě je výstupem polynom pro zadaný prut. Stejně jako v předchozí metodě je toto řešení vhodné pro libovolné zatížení.

Dále například diferenciální transformační metoda (differential transformation method) [12], která je založena na Taylorově rozvoji a vytváří opět analytické řešení ve formě polynomu. Jako poslední stojí za zmínku i přírůstková metoda konečných prvků (incremental finite element method) [13], případně metoda konečných diferencí (finite difference method) [14].

5 Praktická část

5.1 Řešení vetknutého nosníku zatíženého silou

V této podkapitole vypočítáme průhyb nosníku podle metody eliptických integrálů, Angovy metody, Chenovy metody a lineárního přístupu, a jejich výsledky si následně znázorníme ve společném grafu. Jako vstupní parametry pro naši ukázkou použijeme vzorový příklad z [8]. Zadané hodnoty jsou

$E = 120\,000 \text{ MPa}$, $F = 1 \text{ N}$, $L = 200 \text{ mm}$, $J = 0,26042 \text{ mm}^4$ a řešení bude provedeno ve výpočetním programu Matlab.

5.1.1 Nelineární řešení

Pro řešení zadaného problému pomocí eliptických integrálů nejprve musíme určit hodnotu natočení na konci prutu φ_B . Úhel si zvolíme z intervalu $(0; \frac{\pi}{2})$ jak je psáno v podkapitole 4.1. My jsme metodou pokus-omyl zjistili, že hodnota φ_B se pro naši zadanou sílu rovná přibližně $\varphi_B \approx 0,566 \text{ [rad]}$. Jako další krok si určíme počet bodů n , které chceme spočítat a následně vykreslit. Interval $\langle 0; \varphi_B \rangle$ si tedy rozdělíme na 200 bodů, což zaručí dostatečně přesné vykreslení střednice, a pro každý bod určíme hodnotu ϕ_Q podle rov. (4.26). Následně dopočítáme i jednotlivé souřadnice průhybové čáry s použitím rovnic (4.28) a (4.29). Pro naši ukázkou je použit výpočetní software Matlab, ve kterém jsou již zabudované funkce pro eliptické integrály.

U použití metody podle Anga a Chena nehledáme úhel φ_B , nýbrž promítnutou délku l tak, aby vypočítaná se délka zakřiveného prutu přibližně rovnala původní délce prutu L . Podrobněji je to popsáno v předchozích podkapitolách 4.2 a 4.3. Pro zjištění promítnuté délky l i pro následné určení souřadnic bodů zdeformované střednice použijeme explicitní Eulerovu metodu. Jedná se o jednokrokovou numerickou metodu 1. řádu pro řešení tzv. počátečních problémů ve tvaru [15]

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (5.2)$$

Zde \mathbf{y} značí sloupcový vektor neznámých (hledaných) funkcí, \mathbf{f} je vektor pravých stran jednotlivých diferenciálních rovnic soustavy vyjádřených v tzv. normálním tvaru a \mathbf{y}_0 je vektor počátečních hodnot (v našich případech vždy obsahuje pouze nuly). Při numerickém řešení je nejprve nutné rozdělit interval $\langle 0, l \rangle$ na n stejně dlouhých dílčích intervalů délky $h = l/n$, čímž obdržíme celkem $(n+1)$ hodnot nezávislé proměnné x , které označíme $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$. Tyto body se označují jako uzly [15] a pro počáteční a koncový uzel v našem případě platí $x_0 = 0, x_n = l$. Počet intervalů n je nutné vhodně zvolit, protože tato volba nám zásadně určuje přesnost a rychlost výpočtu. Princip numerického řešení rov.

(5.1) spočívá v určení přibližných hodnot neznámých funkcí \mathbf{y} ve všech uzlech x_i . V prvním kroku řešení známe počáteční hodnoty \mathbf{y}_0 v uzlu x_0 a můžeme tedy dosazením vyčíslit vektor $\mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0)$. Dle Eulerovy metody potom přibližné řešení \mathbf{y}_1 pro uzel x_1 obdržíme z rovnice [15]

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + h \cdot \mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0) . \quad (5.3)$$

Obdobně postupujeme v dalším kroku, v němž pouze v rov. (5.3) zvýšíme všechny dolní indexy o jedničku, což znamená, že pro výpočet funkce \mathbf{f} použijeme řešení \mathbf{y}_1 získané v předcházejícím kroku. Obecně tedy v iteraci $(i+1)$ vypočítáme přibližné hodnoty \mathbf{y}_{i+1} podle rovnice

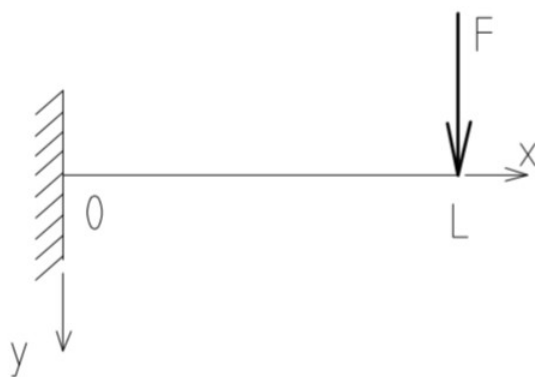
$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) . \quad (5.4)$$

Pro náš případ počet iterací volíme $n = 5000$, abychom si zajistili dostatečnou přesnost výpočtu. S tímto vědomím jsme opět metodou pokus-omyl určili, že podle Anga za použití rovnic (4.35)–(4.37) a podle Chena (4.47) musí platit, že promítnutá délka $l \approx 183\text{mm}$. Jednotlivé body deformované střednice prutu byly určeny podle rovnic (4.35)–(4.37) u Angovy metody a (4.48) u Chenovy metody, odpovídající průhybové čáry jsou vykresleny na obr. 9 v kapitole 5.1.3.

5.1.2 Lineární řešení

Velké deformace prutu se dají řešit také lineární metodou, kde postup popíšu v následujících řádcích. Je ovšem potřeba si uvědomit, že lineární řešení je sice jednoduché a rychlé, ale přesnost značně klesá s mírou deformace.

Souřadnicový systém i znaménkovou konvenci pro ohybový moment volíme stejný jako v předchozích kapitolách.



Obr. 8 Vetknutý nosník.

Sepsáním VVU dostaneme rovnici pro moment

$$M = F(L - x) \quad (5.5)$$

Nyní použijeme rovnici (3.17), kde za moment M dosadíme rov. (5.5):

$$v'' = \frac{FL - Fx}{EJ}. \quad (5.6)$$

Tuto rovnici musíme dvakrát integrovat, abychom dostali rovnici pro průhyb v .

$$v' = -\frac{Fx^2}{2EJ} + \frac{FLx}{EJ} + C_1 \quad (5.7)$$

$$v = -\frac{Fx^3}{6EJ} + \frac{FLx^2}{2EJ} + C_1x + C_2 \quad (5.8)$$

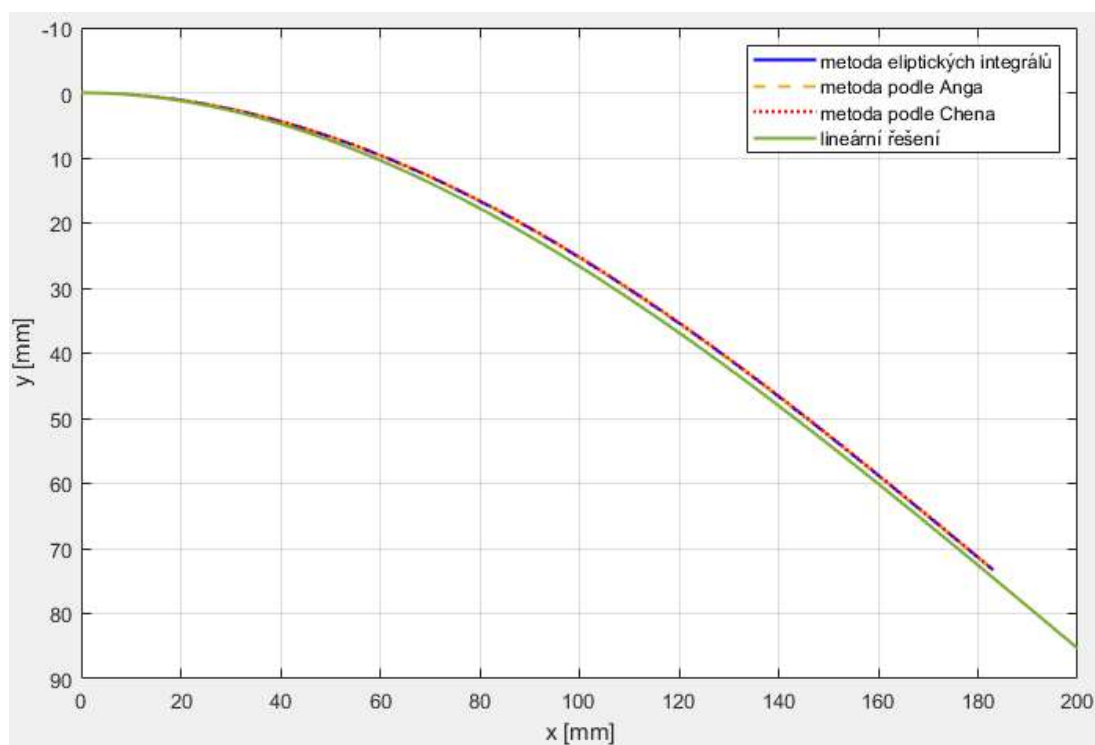
Dalším krokem je určení integračních konstant C_1 a C_2 . Tyto konstanty se určí z okrajových podmínek, kde víme, že ve vetknutí je natočení $v' = 0$ a průhyb $v = 0$. Z toho vyplývá, že konstanty C_1 a C_2 se rovnají nule. Dostaneme tedy

$$v = -\frac{Fx^3}{6EJ} + \frac{FLx^2}{2EJ}. \quad (5.9)$$

Známe tedy rovnici pro průhyb v libovolném bodě. Za účelem srovnání s nelineárními metodami z předchozí kapitoly byl průhyb podle rov. (5.9) vypočítán v $n = 200$ bodech z intervalu $(0, L)$ a následně graficky znázorněn (obr. 9).

5.1.3 Srovnání průhybových čar

Po vykreslení všech průhybových čar do společného grafu (obr. 9) si lze udělat představu ohledně přesnosti jednotlivých metod.



Obr. 9 Vykreslení průhybových čar.

Pro náš případ jednostranně vetknutého nosníku zatíženého osamělou silou vyšly všechny nelineární metody prakticky totožně. Vypíšeme si zde hodnoty průhybu na konci nosníku pro jednotlivé metody, jimiž jsou pro metodu eliptických integrálů $y_{B_elliptic} = 73,3 \text{ mm}$, pro Angovu metodu $y_{B_Ang} = 73,2 \text{ mm}$, Chenovu metodu $y_{B_Chen} = 73,2 \text{ mm}$ a lineární metodu $y_{B_lin} = 85,3 \text{ mm}$. Lze tedy konstatovat, že nezáleží, kterou z uvedených nelineárních metod použijeme a výsledek bude takřka totožný. Dále je třeba si uvědomit, že pro různé typy zatížení a uložení mohou mít metody rozdílné výsledky, neboť přesnost uvedená v této práci je pouze pro jeden konkrétní příklad. Při použití lineární metody pro tento případ se dopouštíme chyby cca 17 %, která určitě není zanedbatelná.

Poznamenejme, že v původním článku [8], z něhož byly převzaty parametry prutu pro výpočty uvedené v této kapitole, je průhybová čára pro lineární řešení vykreslena chybně. Průhyb pod silou autoři uvádějí asi o 10 mm menší, než odpovídá obr. 9, a tedy prakticky shodný s nelineárním řešením. Při velkých deformacích by však průhyb měl u lineárního řešení vyjít výrazně větší než u nelineárního, jak bude názorně ukázáno v další podkapitole 5.2.

5.2 Analýza použitelnosti lineárního řešení

Rozdíly mezi lineárním a nelineárním řešením by měly při vzrůstající velikosti síly F narůstat. Pro lepší posouzení těchto rozdílů se nyní zaměříme pouze na koncový bod B, v němž působí síla F , a vykreslíme si závislost průhybu y_B , horizontálního posuvu Δ a úhlu natočení φ_B na velikosti zatížení. Posuzovat budeme odchylky lineárního řešení od řešení pomocí metody eliptických integrálů. Pro zobecnění výsledků pro pruty s jinou délkou nebo jinými rozměry příčného průřezu je však vhodnější používat pro toto srovnání bezrozměrné veličiny [3]. Po vzoru [3] tedy zavedeme veličiny $\frac{y_B}{L}, \frac{\Delta}{L}, \frac{\varphi_B}{\pi/2}$ a $\frac{FL^2}{EJ}$ a rozdíly mezi oběma metodami pomocí těchto veličin popíšeme.

Vycházíme z následujících rovnic (5.10)–(5.12), které vzniknou po mnoha úpravách kombinací rovnic (4.33), (4.29), (4.31), (4.5) a (4.6) do požadovaného tvaru

$$\frac{FL^2}{EJ} = (K(p) - F(\phi_A, p))^2, \quad (5.10)$$

$$\frac{y_B}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EJ}{FL^2}} (E(p) - E(\phi_A, p)), \quad (5.11)$$

$$\frac{\Delta}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EJ \sin \varphi_B}{FL^2}}. \quad (5.12)$$

Následující vykreslení průhybu a natočení koncového bodu nosníku do grafu si opět rozdělíme na 2 části. První část je nelineární, kde řešíme průhyb pomocí metody eliptických integrálů.

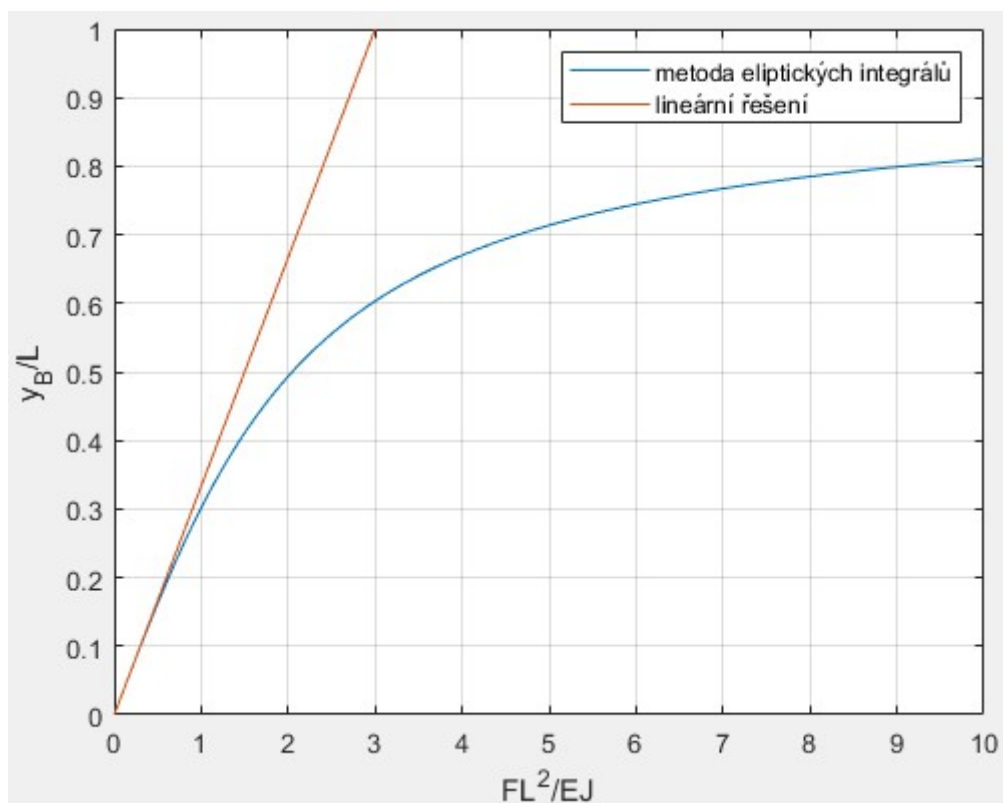
Nejprve si zvolíme interval $(0^\circ, 80^\circ)$ a rozdělíme jej na $n = 100$ úhlů. Pro každý z těchto úhlů dopočítáme hodnotu $\frac{FL^2}{EJ}$ pomocí rov. (5.10). Dále tyto hodnoty dosadíme do (5.11) a do (5.12), čímž obdržíme $n = 100$ hodnot $\frac{y_B}{L}$ a $\frac{\Delta}{L}$. Tyto hodnoty následně vyneseme do obr. 10, 11 a 12. Horní hranici $\varphi_B = 80^\circ$ volíme proto, že pro větší úhly hodnota $\frac{FL^2}{EJ}$ velmi prudce roste (pro $\varphi_B \rightarrow 90^\circ$ platí $\frac{FL^2}{EJ} \rightarrow \infty$) a rozdíly mezi lineárním a nelineárním řešením by tedy v obrázcích byly méně zřetelné.

Metodu eliptických integrálů v grafech porovnáváme s lineárním řešením, které spočítáme na základě rovnic (5.7) a (5.9), kde po dosazení za $x = L$ dostaneme pro natočení a průhyb na konci prutu vztahy

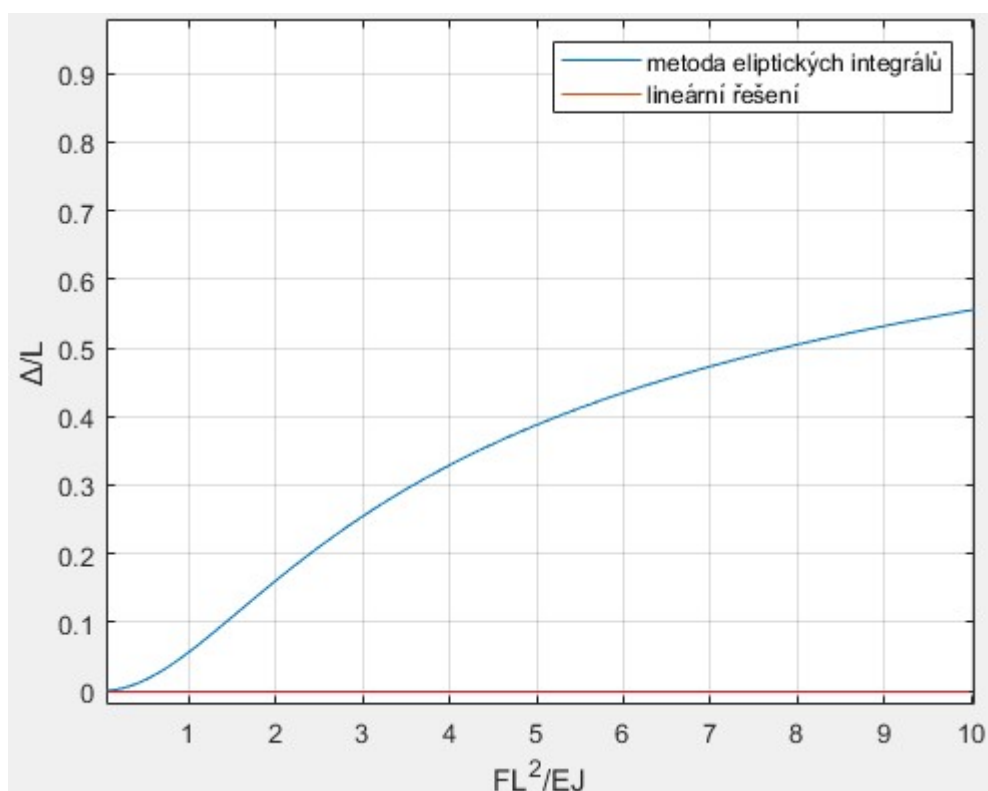
$$\varphi_B = \frac{FL^2}{2EJ} \quad (5.13)$$

$$y_B = \frac{FL^3}{3EJ} \quad (5.14)$$

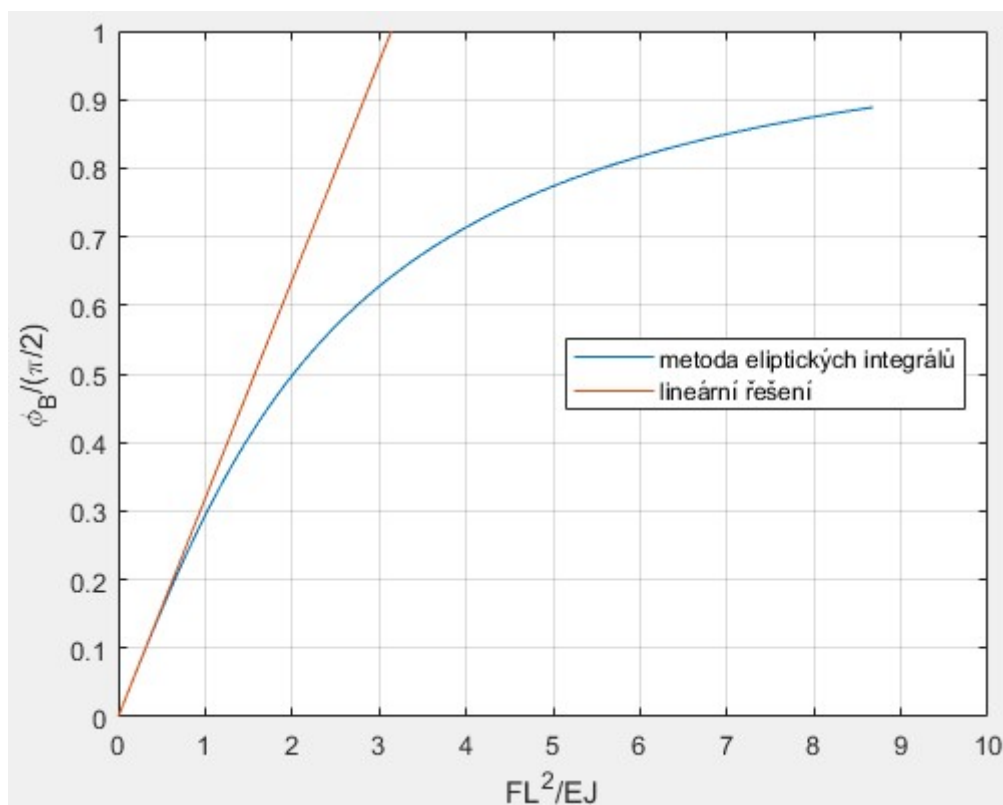
Z rovnic (5.13) a (5.14) vyplývá, že hledané závislosti veličin $\frac{y_B}{L}$ a $\frac{\varphi_B}{\pi/2}$ na veličině $\frac{FL^2}{EJ}$ jsou lineární, což je očekávatelný výsledek. Grafem těchto závislostí jsou tedy přímky, které jsou vykresleny v obr. 10 a 12. Nyní již zbývá pouze vyhodnotit horizontální posuv $\frac{\Delta}{L}$. Zde je třeba si uvědomit, že lineární řešení DRPČ nijak neuvažuje posuv v ose x . Ověřit bychom si to mohli pomocí Castiglianovy věty, kdy bychom si museli na konec prutu přidat tzv. doplňkovou sílu $F_D = 0$ ve směru osy x . Posuv ve směru síly F_D , tedy náš hledaný horizontální posuv Δ je roven parciální derivaci energie napjatosti podle této síly, ale tato derivace je nulová, neboť síla F_D nevytváří žádný ohybový moment, a tudíž i náš posuv Δ je nulový (viz obr. 11).



Obr. 10 Odchylka lin. a nelin. řešení z hlediska průhybu y_B .



Obr. 11 Odchylka lin. a nelin. řešení z hlediska posuvu Δ .



Obr. 12 Odchylka lin. a nelin. řešení z hlediska natočení.

Rozdílnost obou přístupů si může každý čtenář na základě obr. 10, 11 a 12 posoudit sám, neboť z grafů lze vidět, při jakých hodnotách se použité metody začínají významně lišit.

6 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo odvození DRPČ, výčet a popis několika metod pro nelineární řešení DRPČ a následně alespoň jedna z metod prakticky ukázána při výpočtu triviálního příkladu jednostranně vetknutého nosníku na konci zatíženého osamělou silou.

V první části práce jsme se zaměřili na teorii, kde jsme si popsali a definovali především co je to prut, a také jsme se věnovali teorii ohybu, kterou lze zařadit k náročnější části pružnosti a pevnosti. Tato teorie je nutná k následnému pochopení vztahů, které jsou v práci použity.

V další části byl odvozen obecný tvar DRPČ, která byla vlastně výchozím bodem pro každou z metod, které zde byly použity. Ukázali jsme si i zjednodušený tvar této rovnice a vysvětlili podmínky, za kterých ji můžeme použít.

Třetím úkolem v bakalářské práci byl zadán výčet a popis používaných metod pro velké deformace řešené pomocí DRPČ. V této části byly popsány 3 metody, mezi které patří metoda eliptických integrálů, metoda podle Anga a metoda podle Chena. Všechny z uvedených metod jsme si odvodili a podrobněji popsali, avšak metoda eliptických integrálů byla jednoznačně nejnáročnější. V závěru podkapitoly byly naznačeny i další metody, kde ke každé byl uveden patřičný zdroj pro případ, že by si je čtenář chtěl dohledat.

Poslední kapitolou se stala praktická ukázka. Kapitola byla rozdělena do dvou podkapitol, kde v první podkapitole jsme si námi podrobněji popsané metody naprogramovali a vykreslili průhybovou čáru pro převzatý příklad z [8]. Opět platí, že metoda eliptických integrálů byla na programování nejnáročnější, nýbrž použitý software Matlab nám práci velmi ulehčil, neboť jsme použili vestavěné funkce. Metody jsme vykreslili do jednoho grafu společně i s lineární metodou, kde se zanedbává určitý člen DRPČ. Po vykreslení jsme si grafy náležitě popsali a odvodili jsme závěry. Každá metoda počítá s určitou přesností a je třeba mít to v paměti. V druhé podkapitole, tedy v poslední části této práce, jsme srovnali metodu eliptických integrálů s lineární metodou. Toto srovnání je pro obecné veličiny a ukazuje, jak se začne s měnícími se parametry zároveň měnit i přesnost lineárního řešení od nelineárního. Pokud čtenář bude řešit problém vetknutého jednostranně zatíženého nosníku, tak si může zvolit nějakou z metod a sám se rozhodne, jestli podle požadované přesnosti bude stačit lineární metoda, nebo bude potřeba použít nelineární metodu.

Na konec lze dodat, že cíle bakalářské práce byly splněny, a v diplomové práci by toto téma bylo možno rozšířit o další metody, které zde nebyly zpracovány.

Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK a Jan VRBKA. Mechanika těles: pružnost a pevnost I. 3. přepracované vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] VRBKA, Jan. Pružnost a pevnost I: Učební text [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012, 283 s. Dostupné také z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~tprofant/_downloads/UMTMB-ucebni_text-PPI-def-130201.pdf. (11.3.2020).
- [3] GERE, James M. and Stephen P. TIMOSHENKO. Mechanics of materials. 3rd ed. UK: Springer Science+ Business Media Dordrecht, 1991. ISBN 978-0-412-36880-6.
- [4] LI, Chen. An integral approach for large deflection cantilever beams. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2010, (Volume 45, 3), 301-305. ISSN 0020-7462. Dostupné také z: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004>.
- [5] ABRAMOWITZ, Milton and Irene A. STEGUN. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. uk: Constable and Company, 1972. SBN: 486-61272-4.
- [6] FRISCH-FAY, Robert. Flexible Bars. 1th ed. London: Butterworths, 1962, 220 s.
- [7] BISSHOPP, K.E. and Daniel C. DRUCKER. Large deflections of cantilever beams. Q. Appl. Math., 1945. 272-275.
- [8] ANG, H. Marcelo, Wei WANG and Low TECK-SENG. "On the estimation of the large deflection of a cantilever beam," Proceedings of IECON '93 - 19th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics, Maui, HI, USA, 1993, pp. 1604-1609 vol.3.
- [9] LEE, Kyungwoo. Post-buckling of uniform cantilever column under a combined load, Int. J-Non-linear Mech. 36 (2001) 813-816.
- [10] MAGNUSSON, Anders, Matti RISTINMAA and Christer LJUNG. Behavior of the extensible elastica column, Int. J. Solids Struct. 38 (2001) 8441-8457.
- [11] BANERJEE, Atanu, ET AL. Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches, Int. J. Non-Linear Mech. (2008), doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2007.12.020.
- [12] SALEHI, Pouya, ET AL. Journal of Mechanical Science and Technology 26 (9) (2012) 2879~2887.
- [13] KOOL, W. Bob, Marian KUIPERS. A unilateral contact problem with the heavy elastica, Int. J. Non-Linear Mech. 19 (1984) 309-321.

- [14] GOLLEY, B.W. The solution of open and closed elasticas using intrinsic coordinate finite elements, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 146 (1997) 127-134.
- [15] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. Matematika III: Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN ISBN:978-80-214-5400-2.